Ad Soyad: **06.02.2023**

Numara:

MAT 101 ANALİZ I DERSİ BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI

1) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{|x|-x}\operatorname{sgn}\left(\dfrac{x-2}{\sqrt{[\![x]\!]^2-9}}\right)$ biçiminde verilen f fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz (10 puan).

2) $\sin x+\cos x=1$ denkleminin $[0,2\pi)$ aralığındaki çözümlerini bulunuz (10 puan).

3) $a\in\mathbb{R}$ olmak üzere her $n\in\mathbb{N}$ için $x_n=\dfrac{[\![a]\!]+[\![2a]\!]+\ldots+[\![na]\!]}{n^2}$ olacak şekilde bir (x_n) dizisi veriliyor. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{a}{2}$ olduğunu gösteriniz (20 puan).

4) Aşağıda verilen limitleri varsa bulunuz (20 puan).

a) $\lim\limits_{x\to1}\sqrt[3]{x-1}\sin\dfrac{1}{x-1}$ **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}$

5) Aşağıda verilen fonksiyonları sürekli yapan a ile b sayılarını bulunuz (20 puan).

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x+2}, & x\neq-2\\ a, & x=-2\end{cases}$ **b)** $f(x)=\begin{cases}(\pi+2x)\tan x, & x\in\left(-\pi,\dfrac{\pi}{2}\right)\setminus\left\{-\dfrac{\pi}{2}\right\}\\ b, & x=-\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$

6) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $f(a)<f(b)$ olsun. O halde $f(a)<k<f(b)$ olan her $k\in\mathbb{R}$ için $f(c)=k$ olacak şekilde en az bir $c\in(a,b)$ sayısının var olduğunu gösteriniz (10 puan).

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}k.k!}{(n+1)!-1}$ limitini bulunuz (10 puan).

Not: Yukarıdaki sorularda karşılaşılan belirsizliklerde L'Hopital kuralını kullanmayınız. 4. ve 5. sorulardaki her şık 10 puandır. Süre 90 dakikadır.

Dr. Erdem TOKSOY

ANALİZ I DERSİ BÜTÜNLEME SINAVI

CEVAP ANAHTARI

1)

$$f_1(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|-x} \quad \text{ve} \quad f_2(x)=\operatorname{sgn}\left(\frac{x-2}{\sqrt{[\![x]\!]^2-9}}\right) \quad \text{olsun.}$$

O halde $f(x)=f_1(x)f_2(x)$ olur.

Önce D_{f_1} kümesini bulalım her x için $x^2+1\geq 0$ olur.

$|x|-x=0 \iff |x|=x \iff x\geq 0$ dır. Böylece

$D_{f_1}=\mathbb{R}\setminus[0,+\infty)=(-\infty,0)$ bulunur.

Şimdi D_{f_2} kümesini bulalım $[\![x]\!]^2-9>0$ olmalıdır. $[\![x]\!]=a$ derse

$a^2-9>0 \iff (a-3)(a+3)>0$

olur. İşaret tablosu yapalım.

a	$-\infty$	-3		$+3$	$+\infty$
a^2-9	$+$	0	$-$	0	$+$

olup $a\in(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$ bulunur. Burada $[\![x]\!]=a$ olduğundan

$$[\![x]\!]<-3 \vee [\![x]\!]>3 \iff x<-3 \vee x\geq 4$$
$$\iff x\in(-\infty,-3)\cup[4,+\infty)$$

olup $D_{f_2}=(-\infty,-3)\cup[4,+\infty)$ dır. Böylece f nin D_f tanım kümesi

$$D_f=D_{f_1}\cap D_{f_2}=(-\infty,0)\cap\big((-\infty,-3)\cup[4,+\infty)\big)=(-\infty,-3)$$

elde edilir.

2) $\sin x+\cos x=1 \Rightarrow \sin^2x+\cos^2x+2\sin x\cos x=1$

$\Rightarrow 1+\sin 2x=1$

$\Rightarrow \sin 2x=0$

olur.

$\sin 2x=0 \Rightarrow 2x=0+2k\pi, \quad 2x=\pi+2k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow x=0+k\pi, \quad x=\frac{\pi}{2}+k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}$

olur. $x \in [0, 2\pi)$ olduğundan

$x = 0$, $x = \pi$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$ olabilir. Ancak $x = \pi$ ve $x = \frac{3\pi}{2}$

$\sin x + \cos x = 1$ denklemini sağlamaz. O halde $x = 0$ ve $x = \frac{\pi}{2}$ denklemin

$[0, 2\pi)$ aralığındaki çözümleridir.

3) Arşimet prensibinin sonucundan $\forall a \in \mathbb{R}$ için

$$a - 1 < [\![a]\!] \leq a \quad \ldots (1)$$

yazılır. Bu (1) eşitsizliği kullanılarak $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$2a - 1 < [\![2a]\!] \leq 2a$$
$$3a - 1 < [\![3a]\!] \leq 3a$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$na - 1 < [\![na]\!] \leq na$$

yazılır. Böylece $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{(a-1) + (2a-1) + \cdots + (na-1)}{n^2} < \frac{[\![a]\!] + [\![2a]\!] + \cdots + [\![na]\!]}{n^2} \leq \frac{2a + 3a + \cdots + na}{n^2}$$

olur. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$ toplam formülü kullanılarak $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{\frac{n(n+1)}{2} a - n}{n^2} < x_n \leq \frac{\frac{n(n+1)}{2} a}{n^2}$$

$$\Rightarrow \frac{(n+1)a}{2n} - \frac{1}{n} < x_n \leq \frac{(n+1)a}{2n}$$

yazılır. $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{n+1}{2n} a - \frac{1}{n} \right) = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{n+1}{2n} a - \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = \frac{a}{2}$

$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n+1}{2n} a = \frac{a}{2}$ olup sıkıştırma teoreminden

$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \frac{a}{2}$ bulunur.

4) a) $\lim_{x\to 1} \sqrt[3]{x-1}\, \sin\frac{1}{x-1}$ limiti için

$f(x)=\sqrt[3]{x-1}$ ve $g(x)=\sin\frac{1}{x-1}$ alınırsa

$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\sqrt[3]{x-1}=0$ olur. Ayrıca $\forall x\in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ için $-1\le g(x)\le 1$

olduğundan g fonksiyonu sınırlıdır. O halde

$$\lim_{x\to 1}\sqrt[3]{x-1}\,\sin\frac{1}{x-1}=\lim_{x\to 1} f(x).g(x)=0$$

bulunur.

b) $\sin a-\sin b=2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$

eşitliğini kullandım.

$$\lim_{x\to+\infty}\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}=\lim_{x\to+\infty}2\cos\left(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right)\sin\left(\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right)$$
$$(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})$$

$$=2\lim_{x\to+\infty}\cos\left(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right).\sin\left(\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\right)$$

yazılır. Burada

$$\lim_{x\to+\infty}\sin\left(\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\right)=0\ ,\quad -1\le\cos\left(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right)\le 1$$

olduğundan

$$\lim_{x\to+\infty}\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}=2.\lim_{x\to+\infty}\cos\left(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right).\sin\left(\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\right)=0$$

bulunur

5) a) $\lim_{x\to-2} f(x)=\lim_{x\to-2}\frac{x^2-4}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)}=\lim_{x\to-2}(x-2)=-4$

olup f nin sürekli olması için $f(-2)=a=-4$ olmalıdır.

$a=-4$ bulunur.

5) b) Yine f nin sürekli olması için

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}} f(x) = f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = b$$

olmalıdır.

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}} (\pi+2x).\tan x \to 0.(-\infty)$$ belirsizliği mevcuttur.

$x+\frac{\pi}{2} = u$ denirse $x\to -\frac{\pi}{2}$ iken $u\to 0$ olup

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}} (\pi+2x)\tan x = \lim_{u\to 0} 2u.\tan\left(u-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= -2\lim_{u\to 0} u.\cot u$$

$$= -2\lim_{u\to 0} \frac{u}{\tan u}$$

$$= -2$$

olup $b=-2$ bulunur.

6) $f: [a,b]\to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $f(a)<f(b)$ olsun.

$f(a)<k<f(b)$ olan her $k\in\mathbb{R}$ için $g: [a,b]\to \mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-k$ fonksiyonunu tanımlayalım. Böylece f, $[a,b]$ de sürekli olduğundan g fonksiyonu $[a,b]$ kümesinde sürekli olur. Burada $g(a)=f(a)-k$, $g(b)=f(b)-k$ ve $f(a)<k<f(b)$ olduğundan

$g(a)<0$ ve $g(b)>0$ olur. O halde Bolzano-Cauchy teoreminden

$$g(c)=f(c)-k=0 \iff f(c)=k$$

olacak şekilde en az bir $c\in(a,b)$ vardır.

7) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n = \sum_{k=1}^{n} k.k!$ ve $y_n = (n+1)! - 1$

olacak şekilde (x_n) ve (y_n) dizilerini alalım.

$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} (n+1)! - 1 = +\infty$ olur. Yine $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$y_{n+1} - y_n = (n+2)! - 1 - (n+1)! + 1 = (n+1)!\,(n+2-1) = (n+1)!\,(n+1) > 0$

olup $y_{n+1} > y_n$ olduğundan (y_n) artandır.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1.1! + 2.2! + \cdots + n.n! + (n+1).(n+1)!) - (1.1! + 2.2! + \cdots + n.n!)}{(n+1)(n+1)!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\,(n+1)!}{(n+1)\,(n+1)!}$$

$$= 1$$

olur. O halde Stolz teoreminden

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k.k!}{(n+1)! - 1} = 1$$

elde edilir.